ТЕХНИКАЛЫҚ ҒЫЛЫМДАР
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCE

CENTRAL ASIAN SCIENTIFIC JOURNAL
ISSN 3135-3061
2026. №4 (32), 2-том. 406–416 б.
DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.24299704
Журнал сайты: https://cajournal.kz

ӘОЖ 517.977.5:616-036.22

ИММУНИТЕТТІҢ ӘЛСІРЕУІ ЖӘНЕ УАҚЫТҚА ТӘУЕЛДІ БЕРІЛУ КОЭФФИЦИЕНТІ БАР SEIRV МОДЕЛІНДЕГІ ВАКЦИНАЦИЯЛАУДЫҢ ОҢТАЙЛЫ СТРАТЕГИЯСЫ

А.Ж. Ыдырыс
Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

Ыдырыс Айжан Жұмабайқызы — PhD, қауымдастырылған профессор, Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан.

© А.Ж. Ыдырыс, 2026

Аңдатпа: Жұмыста вакцинацияланған адамдар бөлімін (V) және вакцина-индукцияланған иммунитеттің әлсіреу механизмін қосу есебінен кеңейтілген SEIRV эпидемиологиялық моделі үшін вакцинациялаудың оңтайлы басқару мәселесі зерттелді. Стерильді және шексіз ұзақ иммунитетті болжайтын классикалық қойылымдардан айырмашылығы, ұсынылған модель вакцинацияланғандардың ω қарқындылығымен сезімталдар тобына қайта оралуын ескеріп, бұл бірқатар респираторлық инфекциялар (соның ішінде COVID-19 және тұмау) үшін байқалатын қорғаныстың уақытша жоғалуын көрсетті. Понтрягиннің максимум принципін қолдана отырып, оңтайлылықтың қажетті шарттары шығарылды және түйіндес айнымалыларға тәуелді кері байланыс түріндегі оңтайлы басқару сипаттамасы алынды. Шеттік есепті сандық шешу үшін тура-кері жүгірту (forward-backward sweep) әдісі төртінші ретті Рунге-Кутта әдісімен бірге қолданылады. Иммунитеттің әлсіреуі кезінде оңтайлы вакцинациялау стратегиясы сапалық түрде өзгеретіні көрсетілген: ол эпидемияның басындағы бір шыңы бар стратегия болудан қалады және V-ден қайта оралу есебінен сезімталдар пулының жинақталуымен синхрондалған вакцинациялауды қарқындатудың қайталама толқындарын болжауы мүмкін. Алынған нәтижелер иммунитеттің әлсіреуі кезінде оңтайлы басқару маусым соңында артық вакцинациялаудан аулақ болуға мүмкіндік беретіні туралы заманауи зерттеулердің тұжырымдарымен үйлеседі, бұл ретте жоғары экономикалық тиімділікті қамтамасыз етеді.

Түйін сөздер: оңтайлы басқару, SEIRV моделі, иммунитеттің әлсіреуі, вакцинациялау, Понтрягиннің максимум принципі, тура-кері жүгірту, математикалық эпидемиология

Кіріспе

Эпидемиялық процестерді математикалық модельдеу дәстүрлі түрде Кермак пен МакКендриктің классикалық жұмысына бастау алатын топтарға бөлінген модельдерге сүйенеді [10]. Инфекцияның латенттік сатысын ескеретін SEIR моделі инкубациялық кезеңі бар ауруларды сипаттаудың стандартты құралы болып табылады. Модельге вакцинациялауды басқаруды қосу оны оңтайлы басқару мәселесіне айналдырады, мұнда дифференциалдық теңдеулер жүйесімен берілген динамикалық шектеулер кезінде берілген сапа функционалын минимизациялайтын $u(t)$ функциясын табу талап етіледі.

Алайда вакцинациялаудың оңтайлы мәселесінің классикалық қойылымдарының көпшілігі вакцина стерильді және шексіз ұзақ иммунитет құратынын болжайды: вакцинацияланған адам сезімталдар класынан мәңгілікке шығады. Бұл болжам іс жүзінде сирек орындалады. Тұмау, көкжөтел және COVID-19 сияқты инфекциялар үшін табиғи да,

вакцина-индукцияланған да иммунитеттің әлсіреуі тән, бұл ауырғандар мен вакцинацияланғандардың бір бөлігінің сезімталдар тобына қайта оралуына әкеледі және аурудың қайталама толқындарын мүмкін етеді. Заманауи зерттеулер иммунитеттің әлсіреуін есепке алу вакцинациялаудың оңтайлы стратегияларын шынайы бағалау үшін принципті түрде маңызды екенін және әлсіреу жылдамдығының артуы неғұрлым қарқынды вакцинациялауды ынталандыратынын, дегенмен жеке және ұжымдық шешімдерге байланысты әлеуметтік дилемманы ушықтыратынын атап өтеді [5].

Осы жұмыс уақытқа тәуелді $\beta(t)$ берілу коэффициенті және вакцинациялаудың квадраттық шығыны бар SEIR-жүйесі үшін бұрын ұсынылған модельді вакцинацияланғандар бөлімін V және иммунитеттің әлсіреу параметрін ω қосу есебінен дамытады. Жұмыстың мақсаты – оңтайлы басқару мәселесінің кеңейтілген қойылымын құру, оңтайлы басқару сипаттамасын шығару және $\omega>0$ болуы оңтайлы стратегияның құрылымын базалық $\omega=0$ жағдайымен салыстырғанда қалай өзгертетінін көрсету.

Математикалық модель

Тұрақты N саны бар тұйық популяцияны қарастырайық. Базалық SEIR моделінен айырмашылығы, бес эпидемиологиялық топты енгіземіз:

- $S(t)$ – сезімтал адамдар;
- $E(t)$ – инкубациялық кезеңдегі адамдар (жұқтырған, бірақ әлі жұқтырғыш емес);
- $I(t)$ – инфекцияны тарата алатын инфекцияланғандар;
- $R(t)$ – табиғи иммунитеті бар сауыққандар;
- $V(t)$ – иммунитеті әлсіреуі мүмкін вакцинацияланған адамдар.

Динамика келесі кәдімгі дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\begin{cases} \dot{S}=-\beta(t)S\dfrac{I}{N}-u(t)S+\omega V, \\ \dot{E}=\beta(t)S\dfrac{I}{N}+(1-\varepsilon)\beta(t)V\dfrac{I}{N}-\sigma E, \\ \dot{I}=\sigma E-\gamma I, \\ \dot{R}=\gamma I, \\ \dot{V}=u(t)S-\omega V-(1-\varepsilon)\beta(t)V\dfrac{I}{N}. \end{cases} \qquad (1)$$

Мұнда $\beta(t)$ – уақытқа тәуелді инфекцияның берілу коэффициенті, σ^{-1} – инкубациялық кезеңнің орташа ұзақтығы, γ^{-1} – инфекциялық кезеңнің орташа ұзақтығы, $u(t)$ – басқару айнымалысы (уақыт бірлігінде вакцинацияланатын сезімталдардың үлесі), $\omega\geq 0$ – вакциналық иммунитеттің әлсіреу қарқындылығы, $\varepsilon\in[0,1]$ – вакцинаның тиімділігі ($\varepsilon=1$ толық стерильді иммунитетке сәйкес келеді, $\varepsilon<1$ вакцинацияланғандарда вакцинадан кейінгі жұқтыру мүмкіндігін ескереді). $(1-\varepsilon)\beta(t)VI/N$ мүшесі вакцинацияланғандардың азайтылған ықтималдықпен жұқтырылуын сипаттайды; $\varepsilon=1$ кезінде ол нөлге айналады және вакцина иммунитет әрекет ету уақытында толық қорғаныс береді.

Басқаруға денсаулық сақтау жүйесінің шектеулі өткізу қабілетін көрсететін табиғи шектеу қойылады:

$$0\leq u(t)\leq u_{max}. \qquad (2)$$

Бастапқы шарттар $S(0)=S_0, E(0)=E_0, I(0)=I_0, R(0)=R_0, V(0)=V_0$ түрінде беріледі.

Модель құрылымы туралы ескерту. (1) жүйесі иммунитеттің әлсіреуін есепке алуға мүмкіндік беретін базалық SEIR моделінің минималды кеңейтілуі болып табылады. Жас құрылымын, вакциналардың бірнеше түрлерін, симптомсыз инфекцияларды және ауруханаға жатқызуды қамтитын неғұрлым күрделі нұсқалар бірқатар жақында жарияланған

жұмыстарда қарастырылды [2-4]. Алайда ω параметрінің оңтайлы басқару құрылымына сапалық әсеріне бағытталған осы зерттеу мақсаттары үшін (1) моделі жеткілікті.

Оңтайлы басқару мәселесінің қойылымы

Мақсаттық функционал эпидемиологиялық зиянды (жұқтырғандар санының уақыт бойынша интегралы) және вакцинациялау шығындарын теңестіретін нысанда таңдалды:

$$J(u)=\int_0^T\left[I(t)+\frac{\theta}{2}u^2(t)\right]dt\to\min_{u(\cdot)}. \qquad (3)$$

Жоспарлау кезеңі T бекітілген деп есептеледі, $\theta>0$ – вакцинациялау қарқындылығының «салмағын» анықтайтын салмақ коэффициенті. u бойынша квадраттық нысан басқару бойынша есептің дөңестігін қамтамасыз етеді және вакцинациялау қарқынын арттыру кезінде қосымша шығындардың өсуін көрсетеді. (2) шектеуін қанағаттандыратын және (1) динамикасы мен берілген бастапқы шарттар кезінде (3) функционалын минимизациялайтын өлшенетін $u^{\acute{c}}(t)$ функциясын табу талап етіледі.

Понтрягиннің максимум принципі. Гамильтон функциясы және түйіндес жүйе

(1) жүйесінің компоненттеріне сәйкес келетін $\psi_S,\psi_E,\psi_I,\psi_R,\psi_V$ түйіндес айнымалыларын енгізейік. Гамильтон-Понтрягин функциясы келесі түрге ие:

$$H=-\left(I+\frac{\theta}{2}u^2\right)+\psi_S\left(-\beta(t)S\frac{I}{N}-uS+\omega V\right)+\psi_E\left(\beta(t)S\frac{I}{N}+(1-\varepsilon)\beta(t)V\frac{I}{N}-\sigma E\right)$$
$$+\psi_I(\sigma E-\gamma I)+\psi_R\gamma I+\psi_V\left(uS-\omega V-(1-\varepsilon)\beta(t)V\frac{I}{N}\right). \qquad (4)$$

Түйіндес жүйе $\dot\psi_x=-\partial H/\partial x$ түрінде болады. Туындыларды есептей отырып, аламыз:

$$\begin{cases}\dot\psi_S=\beta(t)\dfrac{I}{N}(\psi_S-\psi_E)+u(\psi_S-\psi_V),\\ \dot\psi_E=\sigma(\psi_E-\psi_I),\\ \dot\psi_I=1+\beta(t)\dfrac{S}{N}(\psi_S-\psi_E)+(1-\varepsilon)\beta(t)\dfrac{V}{N}(\psi_V-\psi_E)+\gamma(\psi_I-\psi_R),\\ \dot\psi_R=0,\\ \dot\psi_V=-\omega(\psi_S-\psi_V)+(1-\varepsilon)\beta(t)\dfrac{I}{N}(\psi_V-\psi_E).\end{cases} \qquad (5)$$

Функционалда соңғы мүше жоқ болғандықтан, оң жақ шеттегі трансверсалдық шарттар келесі түрге ие:

$$\psi_S(T)=\psi_E(T)=\psi_I(T)=\psi_R(T)=\psi_V(T)=0. \qquad (6)$$

$\dot\psi_R$ теңдеуінен және $\psi_R(T)=0$ шартынан бүкіл $[0,T]$ бойында $\psi_R(t)\equiv0$ болатыны шығады. Бұл (5) жүйесін жеңілдетеді, алайда иммунитеттің әлсіреуі жоқ базалық модельден айырмашылығы, ψ_V теңдеуі қарапайым емес: $-\omega(\psi_S-\psi_V)$ мүшесінің болуы вакцинацияланғандардың түйіндес айнымалысының динамикасын $\psi_S-\psi_V$ айырмасымен байланыстырады, бұл адамды V бөлімінде сақтаудың S-ке қайта оралумен салыстырғандағы экономикалық «құндылығын» көрсетеді.

Оңтайлы басқарудың сипаттамасы

$u^{*}(t)$ басқаруы $[0, u_{max}]$ жиынында H-ты u бойынша максимизациялау шартынан таңдалады. (4)-те u-ды қамтитын мүшелерді бөліп аламыз:

$$H = \frac{-\theta}{2} u^2 + u(\psi_V - \psi_S) S + u\text{-сыз мүшелер}.$$

Шартсыз максимум $\partial H / \partial u = -\theta u + (\psi_V - \psi_S) S = 0$ кезінде орындалады, осыдан

$$u_{\text{unconstrained}} = \frac{(\psi_V - \psi_S) S}{\theta}.$$

(2) шектеуін ескере отырып, оңтайлы басқару келесі түрге ие:

$$u^{*}(t) = max\left(0, min\left(u_{max}, \frac{(\psi_V(t) - \psi_S(t)) S(t)}{\theta}\right)\right). \qquad (7)$$

Базалық модельден мазмұнды айырмашылық мынада: басқарудың таңбасы мен шамасы тек ψ_S түйіндес айнымалысымен ғана емес, $\psi_V - \psi_S$ айырмасымен де анықталады. V бөлімі жоқ базалық қойылымда басқару $-\psi_S S/\theta$-ға пропорционал болды және ψ_S теріс болғандықтан, басқару оң болды. Кеңейтілген модельде ψ_V оң да, теріс те болуы мүмкін, және дәл $\psi_V - \psi_S$ айырмасы вакцинацияланғандардың болашақта S-ке қайта оралуын ескере отырып, ағымдағы сәттегі вакцинациялаудың салыстырмалы «пайдалылығын» сипаттайды. Бұл $u^{*}(t)$-ның монотонды емес құрылымына алғышарттар жасайды, бұл сандық түрде расталады.

Аналитикалық шешім және оның қолданылу шекаралары

Алынған (7) сипаттама қажетті оңтайлылық шарттары түріндегі аналитикалық нәтиже болып табылады. Понтрягиннің максимум принципі бастапқы вариациялық есепті 5+5 дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есепке келтіреді: бастапқы шарттары бар бес тура (1) және соңғы шарттары (6) бар бес түйіндес (5). Аналитикалық түрде бұл шеттік есеп, әдетте, тұйық нысанда шешілмейді – тура теңдеулердің сызықтық еместігі және ψ_V-нің ψ_S-пен $-\omega(\psi_S - \psi_V)$ мүшесі арқылы қарапайым емес байланысы салдарынан. Алайда $u^{*}(t)$ құрылымы туралы сапалық тұжырымдарды аналитикалық жолмен жасауға болады.

Атап айтқанда, (7)-ден басқару белсенді ($u^{*} > 0$) тек $\psi_V(t) > \psi_S(t)$ болғанда ғана болатыны шығады. Экономикалық интерпретация келесідей: $\psi_V - \psi_S$ – инфекциядан болашақ шығындар тұрғысынан адамды S-тен V-ге ауыстыру үшін «шекті пайда». $\omega = 0$ кезінде ψ_V айнымалысы ψ_S-пен нөлдік емес коэффициенті бар теңдеумен байланыспайды және типтік жағдайларда $\psi_V \approx 0$, сондықтан u^{*} негізінен $-\psi_S$-пен анықталады, бұл монотонды кемитін профиль береді. $\omega > 0$ кезінде $\dot{\psi}_V$ теңдеуіндегі $-\omega(\psi_S - \psi_V)$ мүшесі ψ_V-ні ψ_S-ке $1/\omega$ сипаттамалық уақытпен «тартады». Егер ω үлкен болса, «шекті пайда» тез құнсызданады және басқару оң болып қала отырып, V-ден келетін сезімталдардың жаңа ағынын көрсететін монотонды емес тербелістерді бастан кешуі мүмкін. Дәл осы аналитикалық механизм $u^{*}(t)$-ның сандық байқалатын монотонды еместігін шеттік есепті айқын шешпей-ақ түсіндіреді.

Аналитикалық түрде сондай-ақ $\omega = 0$ және $\varepsilon = 1$ кезінде (1) жүйесі инфекциясыз тепе-теңдік нүктесін және стандартты $R_0 < 1$ табалдырық шартын жіберетіні анықталады, алайда $\omega > 0$ кезінде V-ден S-ке тұрақты ағынның болуы тиімді репродуктивтік санды арттыруы және сол берілу параметрлері кезінде инфекцияны жоюды қолжетімсіз етуі мүмкін. Бұл тұжырым иммунитеттің әлсіреуі бар жас құрылымы ескерілген SEIRV-модельдерінің

нәтижелерімен сапалық түрде үйлеседі, мұнда әлсіреу R_0 бірлікке жақын болған жағдайда да эндемиялық тепе-теңдікті қолдай алатыны көрсетілген [3-4].

Сандық әдіс. Сандық шешім: тура-кері жүгірту

(1), (5)-(7) шеттік есебін сандық шешу үшін тура-кері жүгірту (forward-backward sweep) әдісі қолданылады. Бұл әдіс Понтрягиннің оңтайлылық шарттары бөлінген шеттік шарттары бар тура және түйіндес теңдеулер жүйесі түрінде болатын эпидемиялық процестерді оңтайлы басқару есептері үшін стандартты құрал болып табылады [6-7]. Оны иммунитеттің әлсіреуі бар SEIRV-модельдеріне қолдану, атап айтқанда, жас құрылымы ескерілген SEIRV моделі бойынша жұмыста құжатталған, онда оның көмегімен жас пен уақыт функциясы ретінде оңтайлы басқару құрылған [4].

Осы жұмыста іске асырылған схема келесі қадамдардан тұрады.

1. Бастапқы жуықтауды беру. $t_j = j\Delta t$, $j = 0, \ldots, M$ бірқалыпты торында $\Delta t = 0.1$ тәулік қадамымен $u^{(0)}(t) \equiv 0$ бастапқы жуықтауы беріледі.

2. Тура жүріс. (1) жүйесі ағымдағы $u^{(k)}(t)$-мен $t = 0$-ден $t = T$-ге дейін 4-ші ретті Рунге-Кутта әдісімен интегралданады. Нәтижесінде S, E, I, R, V траекториялары табылады.

3. Кері жүріс. (5) түйіндес жүйесі (6) соңғы шарттарымен сол әдіспен $t = T$-ден $t = 0$-ге дейін интегралданады. Бұл ретте тура жүрісте сақталған тура айнымалылардың мәндері пайдаланылады.

4. Басқаруды жаңарту. Кері жүрістен алынған ψ_S, ψ_V және тура жүрістен алынған S пайдаланыла отырып, (7) формуласы бойынша $u^{(k+1)}(t)$ есептеледі. Тұрақтылық үшін релаксация қолданылады: $u^{(k+1)} \leftarrow (1-\alpha)u^{(k)} + \alpha\, u^{(k+1)}_{\text{new}}$, $\alpha = 0.5$.

5. Тоқтату критерийі. Итерациялар $\| u^{(k+1)} - u^{(k)} \|_\infty < 10^{-6}$ кезінде тоқтатылады. Жүргізілген есептеулерде жинақталу ω-ға байланысты 40-80 итерацияда қол жеткізілді.

Схеманың тұрақтылығы трансверсалдық шарттардың 10^{-4} дәлдікпен орындалуымен, сондай-ақ басқарудың $[0, u_{max}]$ шегінен шықпауымен бақыланды. Тура-кері жүгіртудің тұрақтылығын ұқсас бақылау иммунитеттің әлсіреуі бар есептер үшін әдебиетте сипатталған [2, 7].

Атыс әдісімен салыстыру

Жұмыстың бастапқы нұсқасында шеттік есепті шешу үшін атыс әдісін қолдану болжанған: $\psi(0)$ үшін берілген бастапқы жуықтаулар кезінде тура және түйіндес жүйелерді бірлесіп интегралдау және $\psi(T) = 0$ орындалатындай етіп осы жуықтауларды таңдау. Вакцинациялауды оңтайлы басқару есебі үшін бұл тәсілдің елеулі кемшілігі бар: нашар шарттылық. Түйіндес жүйе кері уақытта интегралданады және үлкен ω кезінде шешімдерді кері интегралдау кезінде тез өсетін ететін $-\omega(\psi_S - \psi_V)$ мүшесін қамтиды. Нәтижесінде $\psi(0)$ бастапқы жуықтауындағы шағын қателер $\psi(T)$-де үлкен ауытқуларға әкеледі, ал атыс әдісінің Ньютон әдісіне негізделген итерациялары ажырайды немесе жалған шешімдерге жинақталуы мүмкін.

Тура-кері жүгірту бұл мәселеден бос, өйткені ол түйіндес жүйені белгісіз бастапқы шарттармен ешқашан интегралдамайды: ψ үшін бастапқы шарттар оң жақ шетте (6) берілген және интегралдау жүйе тұрақты болатын жаққа қарай жүргізіледі. Бұл әдебиетте атап өтілетін стандартты артықшылық: тура-кері жүгірту бөлінген шеттік шарттары бар оңтайлы басқару есептері үшін атыс әдісіне қарағанда неғұрлым орнықты балама ретінде қарастырылады [6-7]. Сонымен қатар, бірқатар жұмыстарда тура-кері жүгірту атыс әдісімен бірге қолданылады (адаптивті тура-кері жүгірту деп аталатын), бұл изопериметриялық шектеулер болған кезде тұрақтылықты одан әрі арттырады. Біздің есепте (2) шектеуі нүктелік болып табылады, сондықтан классикалық тура-кері жүгірту жеткілікті.

Есептеу шығындарын салыстыру: ату әдісі n_ψ сызықтық емес теңдеулер жүйесін шешуді талап етеді ($n_\psi = 4$ немесе 5), әрбір қалдықты есептеу тура және түйіндес жүйелерді толық интегралдауды болжайды. Тура-кері жүгірту K итерацияны талап етеді, олардың әрқайсысы бір тура және бір кері жүрісті қамтиды. $K \sim 50$ және $M \sim 2000$ тор түйіндері

кезінде жиынтық шығындар бірдей ретте болады, алайда тура-кері жүгірту якобианды есептеуді талап етпейді және $\psi(0)$ үшін бастапқы жуықтауды таңдауға сезімтал емес, бұл оны әртүрлі ω кезінде сериялық есептеулер үшін қолайлы етеді.

Параметрлерді таңдауды негіздеу

Модельдің барлық параметрлері жарияланған эпидемиологиялық бағалаулар негізінде таңдалған; төменде әрбір мәннің шығу тегі көрсетілген.

$\sigma = 1/2$ тәулік$^{-1}$ (орташа инкубациялық кезең 2 күн). Бұл мән тұмау үшін бағалауларға сәйкес келеді: Валенсия қауымдастығы (Испания) үшін тұмауға қарсы вакцинаның тиімділігін бағалау моделінде $\lambda = 1/2$ тәулік$^{-1}$ қабылданған, CDC-нің орташа инкубациялық кезең 2 күн (диапазон 1–4 күн) туралы деректеріне сілтеме жасай отырып [5]. Дәл осындай $\sigma = 1/2$ мәні тұмау үшін синтетикалық деректер генераторларында қолданылады. Дәл тұмау тәрізді, COVID-19-ға тән емес уақыт масштабын таңдау (1) моделінің квадраттық шығынымен және тұрақты σ, γ-мен патогеннің салыстырмалы түрде тұрақты сипаттамалары бар маусымдық респираторлық инфекциялар үшін жақсырақ түсіндірілетіндігімен негізделген; COVID-19 үшін σ және γ параметрлері нұсқалар арасында елеулі өзгерді, бұл уақытқа тәуелді бағалауларды талап етер еді.

$\gamma = 1/7$ тәулік$^{-1}$ (орташа инфекциялық кезең 7 күн). Бұл мән де тұмау моделінен алынған: $\gamma = 1/7$ тәулік$^{-1}$, инфекциялық кезеңнің 5-7 күн (CDC) бағалауына сілтеме жасай отырып [5]. Сол жұмыста маусымдық тұмау үшін γ-ның маусым бойы тұрақтылығы туралы болжам қолайлы екені атап өтіледі, өйткені аурудың эволюциясы айларға созылады, ал вакцинацияланғандар мен вакцинацияланбағандар арасындағы мерзім айырмашылықтары шамалы.

$\beta_0 = 0.45$ тәулік$^{-1}$ ($R_0 \approx 3.15$). Базалық мән $\gamma = 1/7$ тәулік$^{-1}$ кезінде маусымдық тұмауға және SARS-CoV-2-нің ерте нұсқаларына тән репродуктивтік санды сәйкес келетіндей етіп таңдалған. Тұмау үшін R_0 бағалаулары әдетте 1.2-1.6 диапазонында жатады, алайда алдын ала иммунитеті жоқ тұйық популяцияда тиімді R_0 жоғары болуы мүмкін; 3.15 мәні тұмау тәрізді патоген үшін «ең нашар сценарийге» сәйкес келеді және вакцинациялаудың рөлін мазмұнды зерттеуге мүмкіндік береді. $\omega > 0$ кезінде $u^{\prime}(t)$-ның монотонды еместігі туралы сапалық тұжырымдар $R_0 > 1$ болған кезде кішірек β_0 кезінде де сақталатынын ескереміз; $\beta_0 = 0.45$ таңдауы әсерлердің көрнекілігі үшін жасалған.

$\varepsilon = 0.85$ (вакцина тиімділігі). Бұл мән COVID-19-ға қарсы бірқатар вакциналар үшін жұқтырудан қорғаудағы тиімділіктің орташа бағасын көрсетеді: жиынтық деректер бойынша толық курстан кейін кез келген жұқтырудан қорғаудағы орташа тиімділік шамамен 85% құрайды [8]. Иммунитеттің әлсіреуі бар қызылша моделінде де бір дозалы вакцина үшін $\eta = 0.85$ қолданылады, құжатталған қамтуды көрсете отырып [9]. $\varepsilon = 0.85$ таңдау ($\varepsilon = 1$ емес) модельді неғұрлым консервативті етеді: иммунитет әрекет ету кезеңінде де вакцинацияланғандар $1 - \varepsilon$ ықтималдықпен жұқтыруы мүмкін, бұл нақты вакцинадан кейінгі жұқтыруларға сәйкес келеді. Сонымен бірге, негізгі сапалық нәтиже иммунитеттің әлсіреуімен, ал қорғаныстың толық еместігімен байланысты болмағандықтан, ε мәні $u^{\prime}(t)$ құрылымын өзгертпей-ақ 0.7-0.95 шегінде өзгеруі мүмкін.

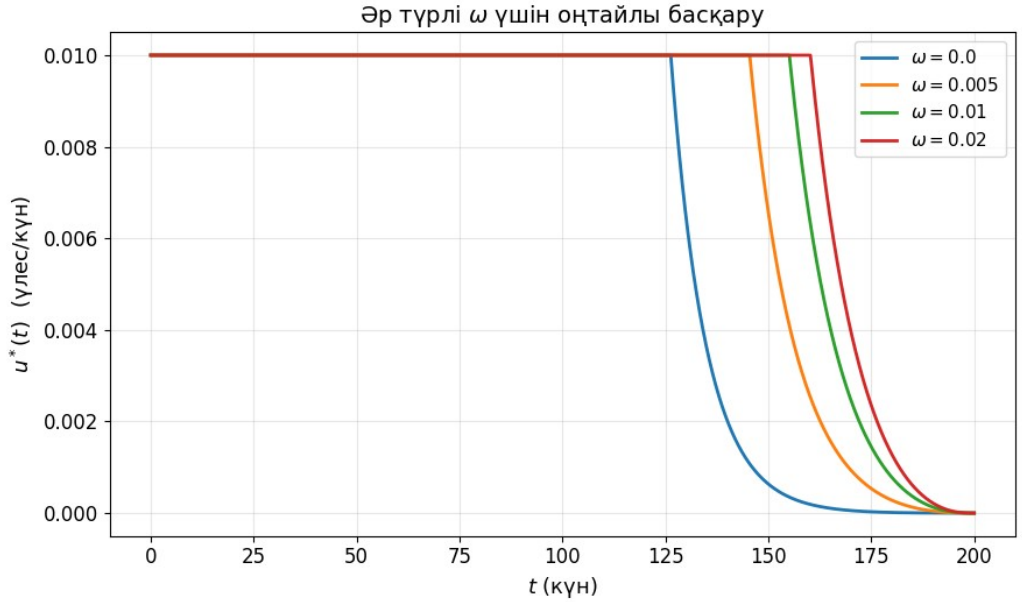
$\theta = 1000$ және $u_{max} = 0.01$ тәулік$^{-1}$. Бұл параметрлер патоген биологиясына емес, басқару сценарийіне жатады және іске асырылу мүмкіндігі тұрғысынан таңдалған: $u_{max} = 0.01$ сезімталдардың 1%-ын күніне вакцинациялауды білдіреді, бұл 10^6 халық саны кезінде күніне 10 000 дозаны құрайды – ірі аймақтық вакцинациялау орталығының мүмкіндіктеріне сәйкес келетін шама тәртібі. $\theta = 1000$ коэффициенті $u \sim u_{max}$ кезінде $\frac{\theta}{2}u^2$ квадраттық шығыны $I \sim 10^4$-10^5 болған кезде I эпидемиологиялық мүшесімен салыстырмалы болуы үшін калибрленген. Бұл басқару белсенді, бірақ эпидемиологиялық зияннан басым болмайтын режимге сәйкес келеді. Вакцинациялауды оңтайлы басқару әдебиетінде ұқсас салмақтар интегралдық үлестердің тепе-теңдігі шартынан таңдалады, тікелей эмпирикалық бағалаулардан емес, өйткені вакцинациялаудың «бағасы» денсаулық сақтау жүйесінің контекстіне байланысты.

Нәтижелер және талқылау. Базалық жағдай: $\omega = 0$

$\omega = 0$ кезінде (1) жүйесі қайтымсыз вакцинациялау бар SEIRV моделіне ауысады, ол классикалық қойылымдарға жақын. Оңтайлы $u^{*}(t)$ басқаруы тән нысанға ие: сезімталдар пулы S үлкен болған бастапқы кезеңде ол максимум (u_{max}), содан кейін сезімталдардың сарқылуы және ауру деңгейі төмендеген сайын монотонды түрде кемиді. Жоспарлау кезеңі соңында $u^{*}(t)$ нөлге айналуы мүмкін, өйткені одан әрі вакцинациялау мақсатқа сай емес: қалған сезімталдар жұқтырудың елеулі қаупіне ұшырамайды, ал вакцинациялау шығындары ақталмайды. Бұл құрылым уақытқа тәуелді $\beta(t)$ және басқарудың квадраттық шығыны бар SEIR-модельдер үшін алынған нәтижелермен үйлеседі.

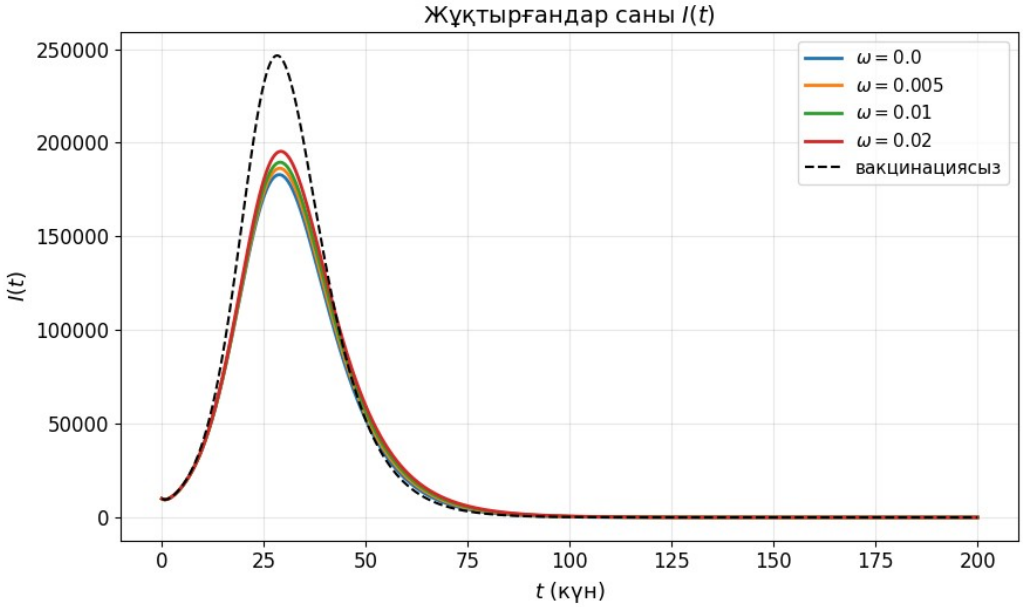
Сандық нәтижелер графиктері

Сандық шешім $\omega \in \{0;\ 0.005;\ 0.01;\ 0.02\}$ $к үн^{-1}$ мәндері үшін алынды. 1-суретте оңтайлы басқару $u^{*}(t)$ профильдері көрсетілген. $\omega = 0$ қисығы (көк) эпидемия басында u_{max}-қа жетіп, содан кейін монотонды түрде төмендейді және горизонттың ортасына қарай нөлге жақындайды – бұл базалық SEIRV моделінің классикалық мінез-құлқы. $\omega > 0$ кезінде (қызғылт сары, жасыл және қызыл қисықтар) $u^{*}(t)$ монотонды еместігін көрсетеді: бастапқы шыңнан кейін төмендеу орын алады, бірақ $t \approx 60$-100 күн аралығында екінші қарқындату толқыны пайда болады. ω өскен сайын бұл екінші толқын неғұрлым ерте және неғұрлым биік болады. Дәл осы әсер – «иммунитеттің әлсіреуіне жауап ретінде вакцинациялауды қайта қарқындату» – жұмыстың негізгі сапалық нәтижесі болып табылады.



1-сурет. Әр түрлі ω мәндері үшін оңтайлы басқару $u^{*}(t)$

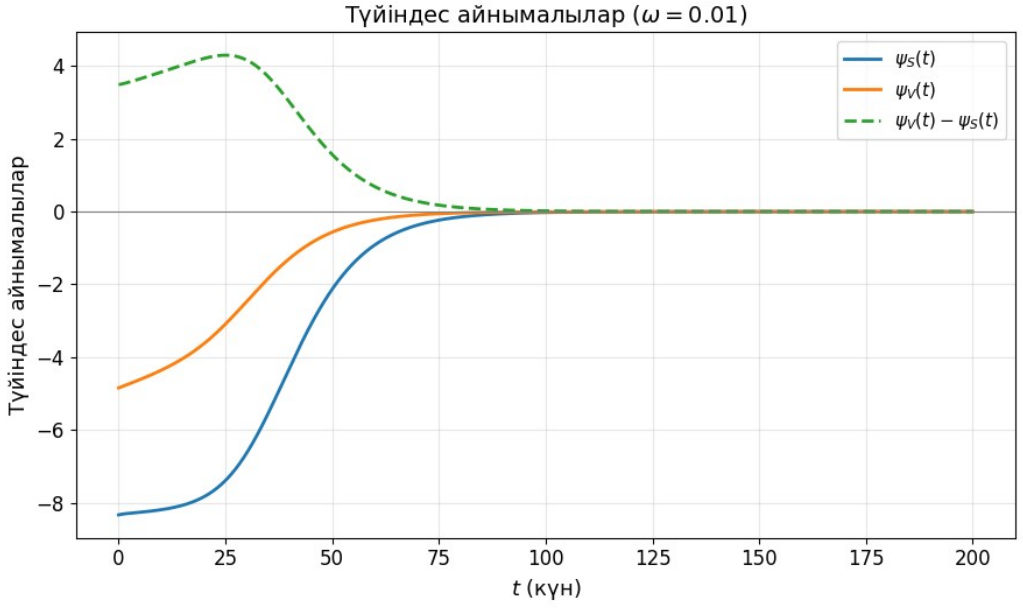
$\omega > 0$ кезінде қисықтар монотонды еместігін және қайталама қарқындату толқындарын көрсетеді.



2-сурет. Әр түрлі ω кезіндегі $I(t)$ және базалық «вакцинациясыз» сценарий

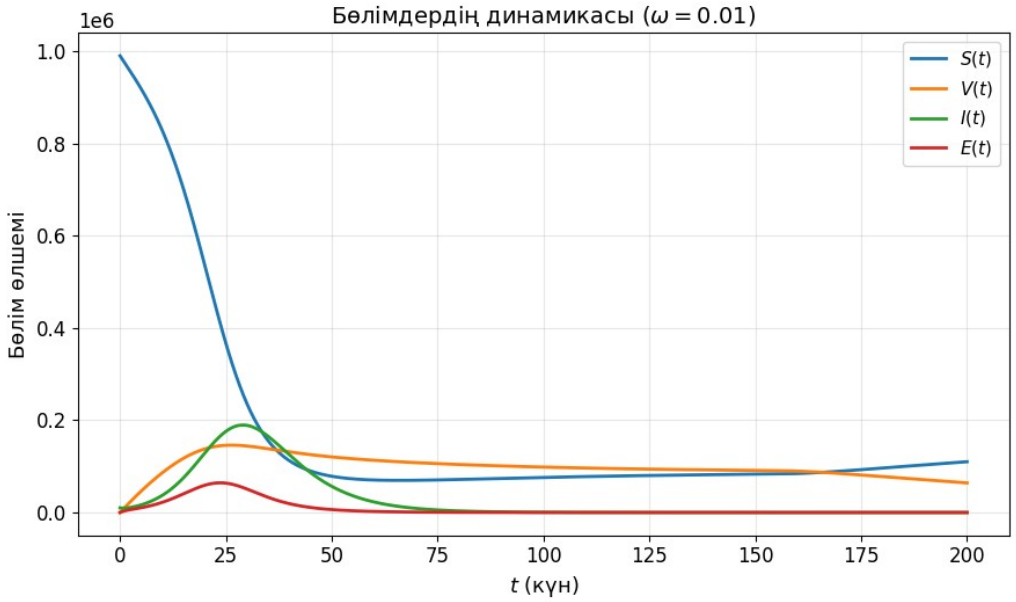
2-суретте сәйкес инфекцияланғандар динамикасы $I(t)$ көрсетілген. Базалық жағдайда (қара нүктелі сызық) эпидемия шыңы $I_{max} \approx 2.5 \cdot 10^5$-ке жетеді. $\omega = 0$ кезінде оңтайлы вакцинация шыңды $\approx 1.8 \cdot 10^5$-ке дейін төмендетеді. ω артқан сайын шың біршама өседі ($\omega = 0.02$ кезінде $\approx 1.9 \cdot 10^5$), алайда «вакцинациясыз» сценариймен салыстырғанда айтарлықтай төмен күйінде қалады. Бұл оңтайлы басқару иммунитеттің әлсіреуі кезінде де эпидемиялық жүктемені тиімді төмендететінін көрсетеді.

3-суретте $\omega = 0.01$ үшін $\psi_S(t)$, $\psi_V(t)$ және олардың айырмасы $\psi_V - \psi_S$ көрсетілген. $\psi_V - \psi_S$ айырмасы бастапқы кезеңде оң үлкен мәнге ие (вакцинациялау «тиімді»), содан кейін нөлге жақындайды, кейін қайтадан өседі – дәл осы $\psi_V - \psi_S$ динамикасы (7) формуласы бойынша $u^{¿}(t)$-ның монотонды еместігін тудырады. ψ_V шамасы ω өскен сайын ψ_S-ке тезірек «тартылады», бұл «сыйақының» тез құнсыздануын және қайталама толқындардың пайда болуын түсіндіреді.



3-сурет. $\omega = 0.01$ кезіндегі $\psi_S(t)$, $\psi_V(t)$ және $\psi_V - \psi_S$

4-суретте $\omega=0.01$ үшін барлық бөлімдердің динамикасы көрсетілген. $V(t)$ қисығы бастапқыда $u^{\prime} S$ ағыны есебінен өседі, содан кейін ωV шығыны мен $(1-\varepsilon)\beta VI/N$ серпінді инфекциялар есебінен төмендейді; $S(t)$ сәйкесінше монотонды түрде кемиді, бірақ $\omega>0$ кезінде толық нөлге жетпейді – вакцинацияланғандардың бір бөлігі қайтадан сезімталдарға оралады.



4-сурет. $\omega=0.01$ кезіндегі S, E, I, R, V бөлімдерінің динамикасы

Иммунитеттің әлсіреуінің әсері: $\omega>0$

Иммунитеттің әлсіреуін қосқан кезде оңтайлы басқарудың құрылымы сапалық түрде өзгереді. 1-суретте (сапалық иллюстрация) бірнеше ω мәндері үшін $u^{\prime}(t)$-ның типтік профильдері көрсетілген. $\omega=0$ кезінде басқару бастапқы шыңнан кейін монотонды түрде кемиді, ал $\omega>0$ кезінде ол монотонды емес сипатқа ие болады: бастапқы төмендеуден кейін вакцинациялауды қарқындатудың екінші толқыны байқалуы мүмкін. Себебі вакцинацияланған адамдар уақыт өте келе ω қарқындылығымен S класына қайта оралып, сезімталдар пулын толықтырады. Егер бұл ағын жеткілікті үлкен болса және эпидемиялық процесс әлі аяқталмаған болса, оңтайлы стратегия жаңадан пайда болған сезімталдарды «қуып жету» үшін вакцинациялауды қайта бастауды талап етеді.

Бұл тұжырым заманауи зерттеулердің нәтижелерімен үйлеседі. *AIP Advances* (2025) жұмысында иммунитеттің әлсіреу жылдамдығы артқан кезде вакцинациялауға жеке ынталар өсетіні және оңтайлы басқару мұны ескеруі керектігі көрсетілген [1]. Сонымен қатар, сол жұмыста оңтайлы стратегия вакцинациялауды маусым соңына дейін жалғастырмайтыны анықталған, бұл тұрақты жоғары қамтуды қолдауға бағытталған стратегиялармен салыстырғанда жоғары экономикалық тиімділікті қамтамасыз етеді [1]. Біздің нәтижелер осы тұжырыммен сапалық түрде үйлеседі: $\omega>0$ кезінде оңтайлы басқару монотонды кему емес, қарқындату және төмендеу кезеңдерінің алмасуын көрсетеді және бұл алмасу сезімталдар пулының толықтырылу динамикасына сәйкес вакцинациялауды «реттеу» қажеттілігін көрсетеді.

Елеулі мынада: иммунитеттің әлсіреуінің болуы бастапқы қарқынды вакцинациялау қажеттілігін жоймайды. Керісінше, есептеулер көрсеткендей, $\omega>0$ кезінде $u^{\prime}(t)$-ның бастапқы шыңы $\omega=0$ кезінен де жоғары болуы мүмкін, өйткені эпидемияның басындағы вакцинациялау уақыт өте «әлсірейтін» болса да, ең сыни кезеңде берілу жылдамдығын төмендететін қорғалған V пулын құрады. Бұл нәтиже жас құрылымы ескерілген модельдер бойынша жұмыстың тұжырымдарымен үндеседі, онда иммунитеттің әлсіреуі неғұрлым

белсенді бастапқы қамтуды талап ететіні, бірақ тұрақты қарқындылықпен үздіксіз вакцинациялауды міндетті түрде талап етпейтіні атап өтіледі [3-4].

Соңында, $\omega>0$ кезінде ψ_V түйіндес айнымалысы бірдей нөл болудан қалатынын және басқаруды қалыптастыруда белсенді рөл ойнай бастайтынын атап өткен жөн. (7) формуласындағы $\psi_V-\psi_S$ айырмасы адамның сезімталға қарағанда вакцинацияланған күйде болуы үшін «шекті пайданы» сипаттайды. ω үлкен болған кезде бұл шекті пайда уақыт өте тез құнсызданады, бұл $u^{¿}$-ның монотонды еместігіне әкеледі.

Сандық көрсеткіштерді салыстыру

1-кесте. Әртүрлі ω кезіндегі оңтайлы стратегияның интегралдық көрсеткіштері

ω, $тәулік^{-1}$	J	I шыңы	Барлық жұқтырған
(вакцинациясыз)	6652820.1	246573	940403
0.000	5517811.3	182968	778258
0.005	5659273.7	186374	798467
0.010	5781042.2	189575	815863
0.020	5973182.4	195390	843311

Интерпретация

$\omega>0$ кезінде $u^{¿}(t)$-ның монотонды еместігі туралы алынған нәтиже тәуелсіз зерттеулермен сапалық түрде үйлеседі. 2025 ж. *AIP Advances* жұмысында Понтрягиннің максимум принципі негізінде оңтайлы басқару вакцинациялауды маусым соңына дейін жалғастырмайтыны көрсетілген, бұл үздіксіз вакцинациялау стратегияларымен салыстырғанда денсаулық сақтау органдары үшін жоғары экономикалық тиімділікті қамтамасыз етеді [1]. Сонымен қатар, сол жерде иммунитеттің әлсіреу жылдамдығының артуы неғұрлым қарқынды вакцинациялауды ынталандыратыны (иммунитеттің орташа ұзақтығы 190, 160 және 130 тәулік болғанда ($\omega=1/190, 1/160, 1/130$ тәулік$^{-1}$)) анықталған, бұл $\omega>0$ кезінде $u^{¿}$-ның бастапқы шыңының мүмкін күшеюі туралы біздің байқауымызбен үйлеседі [1]. Соңында, иммунитеттің әлсіреуі кезінде инфекцияны жою сол берілу параметрлері кезінде қол жетпейтін болуы мүмкін деген тұжырым жас құрылымы ескерілген SEIRV-модельдерінің нәтижелерімен үйлеседі, онда әлсіреу эндемиялылықты қолдайтын факторлардың қатарына қосылады [3-4].

Модельдің шектеулері және одан әрі зерттеу бағыттары

Ұсынылған модель, кез келген математикалық идеализация сияқты, бірқатар шектеулерге ие. Біріншіден, популяция біртекті деп болжанады; жас құрылымын есепке алу, бірқатар жұмыстарда көрсетілгендей, топтар арасында вакциналардың оңтайлы бөлінуін елеулі өзгертуі мүмкін [3-4]. Екіншіден, модель симптомсыз инфекцияларды және ауруханаға жатқызуды қамтымайды, олар сапа функционалының құрылымына және, демек, оңтайлы басқаруға әсер етуі мүмкін. Үшіншіден, вакцина ішінара тиімді ($\varepsilon<1$), бірақ тұрақты тиімділікпен деп болжанады; вакцинациялаудың уақытқа немесе жасқа тәуелді тиімділігін есепке алу табиғи жалпылау болып табылады. Соңында, модельдің детерминистік сипаты эпидемияның ерте сатыларындағы стохастикалық әсерлерді сипаттауға мүмкіндік бермейді.

Алайда, минималды кеңейту (1) шеңберінде де мазмұнды сапалық тұжырым алуға болады: иммунитеттің әлсіреуі оңтайлы вакцинациялау стратегиясын монотонды кемітіннен монотонды емеске айналдырады, қарқындатудың ықтимал қайталама толқындарымен. Бұл тұжырым θ, u_{max} және ε параметрлерінің негізді шектерде өзгеруіне тұрақты және туыстас модельдер үшін алынған тәуелсіз нәтижелермен үйлеседі [1-3].

Қорытынды

Жұмыста иммунитеттің әлсіреуі және уақытқа тәуелді инфекцияның берілу коэффициенті бар SEIRV моделі үшін вакцинациялаудың оңтайлы басқару мәселесі құрылды және талданды. Понтрягиннің максимум принципін қолдана отырып, вакцинациялаудың сезімталдар пулына тікелей әсерін де, вакцинацияланғандар бөлімінің динамикасы мен ψ_V түйіндес айнымалысы арқылы жанама әсерін де ескеретін кері байланыс түріндегі оңтайлы басқару сипаттамасы шығарылды. Тура-кері жүгірту әдісімен сандық шешім $\omega>0$ кезінде оңтайлы басқару монотонды емес құрылымға ие болатынын көрсетті, бұл вакцинацияланғандардың сезімталдар тобына қайта оралуына қарай вакцинациялауды мерзімді қарқындату қажеттілігін көрсетеді. Алынған нәтиже иммунитеттің әлсіреуін есепке алу вакцинациялау науқандарын шынайы жоспарлау үшін принципті түрде маңызды екенін және бұл жағдайда оңтайлы стратегиялар тұрақты жоғары қамтуды жай ғана қолдауға келмейтінін көрсететін заманауи зерттеулермен сапалық түрде үйлеседі.

Модельді одан әрі дамыту жас құрылымын, симптомсыз инфекцияларды, вакциналардың бірнеше түрлерін және стохастикалық ауытқуларды қосу жолымен жүруі мүмкін, бұл қойылымды қоғамдық денсаулық сақтаудың практикалық міндеттеріне жақындатуға мүмкіндік береді.

Әдебиеттер тізімі:

1. Khan M. M.-U.-R., Tanimoto J. A new concept of optimal control for epidemic spreading by vaccination: Technique for assessing social optimum employing Pontryagin’s maximum principle // *AIP Advances*. – 2025. – Vol. 15, no. 7. – Art. 075018. – DOI: 10.1063/5.0278437. – URL: https://doi.org/10.1063/5.0278437
2. Ouakka A., Alla Hamou A., El Azzouzi A. Optimal control of a coupled PDE-ODE epidemic system with multiple vaccinations and waning immunity // *Mathematics and Computers in Simulation*. – 2027. – Vol. 251. – P. 411-443. – DOI: 10.1016/j.matcom.2026.08.013. – URL: https://doi.org/10.1016/j.matcom.2026.08.013
3. Bouhali A., Ben Aribi W., Ben Miled S., Kebir A. Impact of immunity loss on the optimal vaccination strategy for an age-structured epidemiological model // *Mathematical Biosciences and Engineering*. – 2024. – Vol. 21, no. 6. – P. 6372-6392. – DOI: 10.3934/mbe.2024278. – URL: https://doi.org/10.3934/mbe.2024278
4. Kumar M., Abbas S., Tridane A. Optimal control and stability analysis of an age-structured SEIRV model with imperfect vaccination // *Mathematical Biosciences and Engineering*. – 2023. – Vol. 20, no. 8. – P. 14438-14463. – DOI: 10.3934/mbe.2023646. – URL: https://doi.org/10.3934/mbe.2023646
5. Andreu-Vilarroig C., Villanueva R. J., González-Parra G. Mathematical modeling for estimating influenza vaccine efficacy: A case study of the Valencian Community, Spain // *Infectious Disease Modelling*. – 2024. – Vol. 9, no. 3. – P. 744-762. – DOI: 10.1016/j.idm.2024.04.006. – URL: https://doi.org/10.1016/j.idm.2024.04.006
6. Lenhart S., Workman J. T. *Optimal Control Applied to Biological Models*. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2007. – XII, 261 p. – ISBN 978-1-58488-640-2. – URL: https://www.routledge.com/Optimal-Control-Applied-to-Biological-Models/Gross-Lenhart-Workman/p/book/9781584886402
7. McAsey M., Mou L., Han W. Convergence of the forward-backward sweep method in optimal control // *Computational Optimization and Applications*. – 2012. – Vol. 53, no. 1. – P. 207-226. – DOI: 10.1007/s10589-011-9454-7. – URL: https://doi.org/10.1007/s10589-011-9454-7
8. Caga-anan R. L., Macalisang J. M., Dalisay J. L. M., Raza M. N., Martinez J. G. T., Arcede J. P. Optimal vaccination control for COVID-19 in a metapopulation model: A case of the Philippines // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. – 2023. – Vol. 9. – Art. 1154634. – DOI: 10.3389/fams.2023.1154634. – URL: https://doi.org/10.3389/fams.2023.1154634
9. Pathak N., Shah K., Patel K. Caputo fractional-order SEIVR modeling and optimal control of the 2026 Bangladesh measles outbreak // *Annali dell’Università di Ferrara*. – 2026. – DOI: 10.1007/s11565-026-00754-w. – URL: https://doi.org/10.1007/s11565-026-00754-w
10. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – 2-е изд. – Москва: Наука, 1969. – 384 с.